Localization theorem in equivariant algebraic K-theory.(Abstract_要旨)

AUTHOR(S):

Takeda, Yuichiro

【 63 】

氏　　　　名	竹(たけ)　田(だ)　雄一郎(ゆういちろう)
学位(専攻分野)	博　　士 (理　　学)
学 位 記 番 号	理　　博　第 1782 号
学位授与の日付	平 成 9 年 3 月 24 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研 究 科 ・専 攻	理 学 研 究 科 数 学 専 攻
学 位 論 文 題 目	Localization theorem in equivariant algebraic K-theory. (同変代数的 K 理論における局所化定理)
論 文 調 査 委 員	(主　査) 教 授 河 野　明　　教 授 西 田 吾 郎　　講 師 清 水 勇 二

論　文　内　容　の　要　旨

この論文のテーマは，対角化可能な代数群の作用するスキームにたいする不動点定理とその一般化である。簡単のため，ある体上で定義された多様体の場合に説明する。Tを対角可能な代数群，XをTの作用する多様体，$\mathcal{F}$をTの作用する連接層とする。このとき，$\mathcal{F}$のコホモロジーの交代和はTの仮想表現になるこの仮想表現をXの不動点とそこへの$\mathcal{F}$の制限だけに依る量で表すという問題がある。これは，コンパクトリー群の作用する楕円的複体に関する Atiyah, Bott, Segal の結果からの類推であり，彼等の場合と同じく同変 K 群を使って定式化できる。より詳しく言えば，Xとその不動点からなる部分多様体の同変 K 群のある可換図式に帰着される。そしてその可換図式を証明する鍵は，Xとその不動点からなる部分多様体の同変 K 群が同型であることを証明することである。この主張を Atiyah, Segal にならい，著者は同変 K 群の局所化定理と呼んでいた。

この問題は体上だけでなく，一般のスキーム上での相対的な状況で考えることができる。それについては，Thomason の仕事がある。彼は同変エタール K 理論を定義し，その局所化定理（彼は Concentration theorem と呼んでいる）を証明している。しかし，エタール K 理論の難解さのためいくつかの条件が必要であり，またコホモロジーの交代和についても不十分な形でしか証明されていない。したがって，Thomason と同じ状況で同変 K 群の局所化定理を証明することができれば，それらの仮定なしで上記の問題を完全に解決することができる。

本論文の主結果は，Tが基礎スキーム上で滑らかであるという仮定のもとで基礎スキーム上有限型のスキームの同変 K 群の局所化定理が成り立つというものである。この結果によって，Thomason の結果よりも弱い仮定のもとでコホモロジーの交代和の公式が完全な形で証明される。

証明の方法を概説する。まず，スキームの逆極限に対する同変 K 群の自然性とある帰納法から，基礎スキームが体の場合に帰着させる。さらに帰納法を繰り返し用いることによって，アフィンかつ滑らかな場合に帰着させる。次に射影空間への同変埋め込みを作ることによって，射影空間の場合に帰着させる。

そして最後に射影空間とその不動点からなる部分多様体の同変K群を計算することによって，同型を確かめることができる。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

Tを対角化可能な代数群，XをTの作用する多様体，FをTの作用する連接層とする。このとき，Fのコホモロジーの交代和はTの仮想表現になる。この仮想表現をXの不動点とそこへのFの制限だけに依る量で表すという問題がある。

この問題の歴史は古く，Klein や Hurwitz による対称性のある Riemann 面の研究から，Lefschetz の不動点定理，さらにはコンパクト Lie 群における Wyle の指標定理もこのような形に一般化されうる。

この問題の位相幾何学的な本質を読み取り，コンパクトリー群の作用する楕円的複体に関する指数定理として定式化したのは，Atiyah，Bott，Segal である。そこで重要なのは同変K群を使った定式化である。すなわちXの同変K群と，その不動点からなる部分多様体の同変K群のなす，ある可換図式を示すことが指数定理と呼ばれる。そそてその可換図式を証明する鍵は，Xとその不動点からなる部分多様体の同変K群が同型であることを証明することである。この主張を Atiyah-Segal にならい，著者は同変K群の局所化定理と呼んでいる。

この問題は体上だけでなく，一般のスキーム上での相対的な状況で考えることができる。正標数代数群に対して Wyle の指標定理を証明する際にも，この一般化が重要であった。

それについては，R. W. Thomason の仕事がある。彼はエタール位相を使った，同変エタールK理論を定義し，その局所化定理（彼は Concentration theorem と呼んでいる）を証明している。しかし，エタールK理論の複雑さのためいくつかの条件が必要であり，またもっとも重要なコホモロジーの交代和についても不十分な形でしか証明されていない。

申請者竹田雄一郎氏は，エタールK理論を用いた場合に必要となる仮定なしで上記の問題を完全に解決するために，同変代数的K理論の局所化定理を証明した。

竹田氏は，Tが基礎スキーム上で滑らかであるという仮定のもとで基礎スキーム上有限型のスキームの同変K理論の局所化定理が成り立つということを証明した。この結果によって，Thomason の結果よりも弱い仮定のもとでコホモロジーの交代和の公式が完全な形で証明される。

証明の方法は，まず基礎スキームが体の場合に帰着させ，さらアフィンかつ滑らかな場合に帰着させる。次に射影空間への同変埋め込みを作ることによって，射影空間の場合に帰着させる。そして最後に射影空間とその不動点からなる部分多様体の同変K群を計算することによって，同型を確かめることができる。